主系列表現の既約性について (等質空間における調和解析 II)

大豆生田, 雅一

数理解析研究所講究録
262巻 1976年 42-53

主系列表現の既約性について

早大 理工　　大豆生田 雅一

§0. 序

Gを連結，半単純，非コンパクトリー群で中心が有限とする。KをGの極大コンパクト部分群，G，Kのリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を対応するカルタン分解とする。$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ 上実数値一次関数 α に対し $\mathfrak{g}_\alpha$ を

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g} \mid [H,X]=\alpha(H)X,\ すべての\ H\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\}$$

と定義し $\mathfrak{g}_\alpha\neq\{0\}$ なる α の全体を Σ とする。Σ に辞書式順序を導入して $\Sigma^+=\{\alpha\in\Sigma\mid\alpha>0\}$ とおく。さらに $m(\alpha)$ を $\mathfrak{g}_\alpha$ の次元，$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m(\alpha)\alpha$，$\mathfrak{n}=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha$，$\bar{\mathfrak{n}}=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_{-\alpha}$ とする。$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$，$\mathfrak{n}$，$\bar{\mathfrak{n}}$ に対応するGの解析的部分群をそれぞれ $A_\mathfrak{p}$，N，$\bar{N}$，又，$A_\mathfrak{p}$ のKにおける中心化群をMとする。

このとき $A_\mathfrak{p}=\exp(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ で $G\approx K\times A_\mathfrak{p}\times N$ 微分同相 で $g\in G$，$g=k(g)\exp H(g)\,n(g)$　$k(g)\in K$，$H(g)\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$，$n(g)\in N$ と一意に分解される。K/M上のK不変測度 dk_M を，$\int_{K/M}dk_M=1$

と正規化しておく。$b=kM \in K/M$, $g \in G$ に対し $g \cdot b = k(g k)M \in K/M$, $\mathcal{H} = L^2(K/M, dk_M)$ とする。そこで、G の $\mathcal{H}$ 上の表現を次の様に定義する。

$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C})$　$g \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}$, $b \in K/M$. $b = kM$

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(b) = e^{(\sqrt{-1}\lambda - \rho)H(g^{-1}k)}\varphi(g^{-1}b)$$

このとき、S. Helgason は [H] において $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ の既約性と Harish-Chandra の $\mathfrak{c}$-関数([H]) との関係を与えた。すなわち、$\dim \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = 1$ の場合には次の性質が成立する。

$d\bar{n}$ を $\bar{N}$ のハール測度で $\int_{\bar{N}} e^{-2\rho H(\bar{n})} d\bar{n} = 1$, また、$\Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma \mid \frac{\alpha}{2} \notin \Sigma\}$. $\Sigma_0^+ = \Sigma_0 \cap \Sigma^+$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C})$ に対して

$$\mathfrak{c}(\lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\sqrt{-1}\lambda + \rho)H(\bar{n})} d\bar{n} \qquad \mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0 \quad \alpha \in \Sigma_0^+$$

$$d(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} \Gamma(\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha_0\rangle) 2^{-\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha_0\rangle} \qquad \alpha_0 = \alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle$$

$\langle\ ,\ \rangle$ はキリング形式から作られる $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C})$ 上の双線型形式、Γ は通常の Γ-関数.

すると、$\mathfrak{c}(\lambda)$ を解析接続したものを再び $\mathfrak{c}(\lambda)$ と書くと

$(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ が既約 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{C}(\lambda)\mathfrak{C}(-\lambda) \neq 0$　$\mathfrak{C}(\lambda) = d(\lambda)^{-1}\mathfrak{c}(\lambda)$

以下の議論は、この結果の非ユニタリ主系列表現に関する類似の結果~~に対~~する予想を考えてみる。

§1. 非ユニタリ主系列表現

(σ, E_σ) を M の既約ユニタリ表現、E_σ の内積を $(\ ,\ )_{E_\sigma}$ で表わす。そこで $\mathcal{H}_\sigma$ を次の様なヒルベルト空間とする。

① $\varphi : K \to E_\sigma$ は K の正規化されたハール測度 dk に関する可測関数.

② $\varphi(km) = \sigma(m^{-1})\varphi(k)$ が $k \in K$, $m \in M$ に対して成立.

③ $\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = \int_K \|\varphi(k)\|^2_{E_\sigma} \, dk < \infty$

この①〜③を満す φ の全体を $\mathcal{H}_\sigma$ とする。

$g \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $k \in K$ に対して

$$(\pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi)(k) = e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(g^{-1}k)}\varphi(k(g^{-1}k)) \qquad \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$$

とすると $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ は G の連続表現となる。

定義　M の既約ユニタリ表現 (σ, E_σ) と $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ に対して、$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ を G の非ユニタリ主系列表現という。

次に (τ, V_τ), K の有限次元ユニタリ表現とする。ここで

$$C(G:\tau) = \{ f : G \to V_\tau \mid \text{(i) 連続},\ \text{(ii) } f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g) \ \ g \in G,\ k \in K \}$$

$$\mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) = \{ A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\sigma, V_\tau) \mid \tau(m)A = A\sigma(m) \ \ \forall m \in M \}$$

$$\mathrm{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma) = \{ B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\tau, E_\sigma) \mid B\tau(m) = \sigma(m)B \ \ \forall m \in M \}$$

$A \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau)$, $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $g \in G$ に対して

$$(P_A^\lambda \varphi)(g) = \int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}k)} \tau(k(g^{-1}k)) A\varphi(k) \, dk, \qquad \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$$

と定義する。

$P_A^\lambda : \mathcal{H}_\sigma \to C(G:\tau)$ 連続線型写像となる。(但し $C(G:\tau)$ には コンパクト一様収束の位相を入れる。)

このとき

補題1　$\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $g, g_0 \in G$, $(P_A^\lambda \varphi)(g^{-1}g_0) = P_A^\lambda(\pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi)(g_0)$

が、すべての $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C})$ 及び M の既約ユニタリ表現 σ に対して成立する。

<u>系2</u> P^λ_A の核は $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の不変閉部分空間となる。

<u>§2. $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性と P^λ_A の単射性</u>

以後 K の有限次元ユニタリ表現は常に既約と仮定する。又 K, M の既約ユニタリ表現 τ, σ の反傾表現を ${}^t\tau$, ${}^t\sigma$、さらに線型写像 A の転置写像を ${}^tA$ で表わす。

<u>補題3</u> (σ, E_σ), (τ, V_τ) をそれぞれ M, K の既約ユニタリ表現、$\mathrm{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma) \neq \{0\}$ $B \neq 0 \in \mathrm{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma)$ $v \in V_\tau$ $v \neq 0$ $\varphi_{B,v}(k) = B(\tau(k^{-1})v)$ とする。すると、$\varphi_{B,v} \in \mathcal{H}_\sigma$ であり、$\varphi_{B,v}$ が $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の巡回ベクトルであることと $P^{-\lambda}_{{}^tB}$ が $\mathcal{H}_{{}^t\sigma}$ 上単射であることは同値。

証明

まず E_σ, V_τ の双対空間を E_σ', V_τ' と書き、$E_\sigma \times E_\sigma'$, $V_\tau \times V_\tau'$ 上の標準的な双線型形式をそれぞれ $\langle\ ,\ \rangle_{E_\sigma}$ $\langle\ ,\ \rangle_{V_\tau}$ と書く。

$\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $\varphi' \in \mathcal{H}_{{}^t\sigma}$ に対し $\langle \varphi, \varphi' \rangle_\sigma = \int_K \langle \varphi(k), \varphi'(k) \rangle_{E_\sigma} dk$ とすると

(1) $\langle \pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi_{B,v}, \varphi' \rangle_\sigma = \langle v, (P^{-\lambda}_{{}^tB}\varphi')(g) \rangle_{V_\tau}$ $\quad \varphi \in \mathcal{H}_{{}^t\sigma}$

が成立する。

従って $P^{-\lambda}_{{}^tB}$ が単射であれば $\varphi_{B,v}$ は巡回ベクトルとなる。

逆に、$v_0 \neq 0$ $v_0 \in V_\tau$、$\varphi_{B,v}$ が巡回ベクトルとなること

と $\varphi_B v_0$ が巡回ベクトルとなることが同値となる（T の既約性）から (1) より $P_B^{-\lambda}$ が単射となる。

<u>命題 4</u>

$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ が既約である為の必要十分条件は次の性質をもつ K の既約ユニタリ表現 (τ, V_τ) が存在すること。

(i) $\mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) \neq \{0\}$ i.e. $\dim \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) \geqq 1$

(ii) $B \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau)$, $B^* \in \mathrm{Hom}(V_\tau, E_\sigma)$ を

$(B^* v, e)_{E_\sigma} = (v, Be)_{V_\tau}$ $v \in V_\tau$, $e \in E_\sigma$ とし

$\hat{B} = {}^t B^*$ このとき, $B \neq 0$ なら

P_B^{λ}, $P_{\hat{B}}^{-\lambda}$ が共に単射となる。

証明.

$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ を K に制限した表現に含まれる K の既約ユニタリ表現の一つを (τ, V_τ) とする。さらに $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ が既約とする。

このとき $\mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) \neq \{0\}$ であり, $B \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau)$ とすると, $P_B^{\lambda} \varphi_{B^*, v}(e) = (\dim_{\mathbb{C}} V_\tau)^{-1}\, \mathrm{Trace}(BB^*)\, v$. $v \in V_\tau$.

従って $P_B^{\lambda} \neq 0$. 故に系 2 から P_B^{λ} $(B \neq 0)$ は単射. 同様に $(\pi_{t\sigma,-\lambda}, \mathcal{H}_{t\sigma})$ が既約ならば $P_{\hat{B}}^{-\lambda}$ は単射。$(\pi_{t\sigma,-\lambda}, \mathcal{H}_{t\sigma})$ の既約性は $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性と

$\langle \pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi, \pi_{t\sigma,-\lambda}(g)\varphi' \rangle_\sigma = \langle \varphi, \varphi' \rangle_\sigma$ $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $\varphi' \in \mathcal{H}_{t\sigma}$

から得られる。

逆に i), iii) を仮定する。

ii) P_B^λ が単射であると $(\pi_{\sigma\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の $\{0\}$ でない不変閉部分空間は $\varphi_{B^* v}$ $v \in V_\tau$, $v \neq 0$ を含む。

ii) が成立すると i) より $\varphi_{B^* v} \neq 0$ 又，補題3により $(\pi_{\sigma\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性は $P_{\tilde{B}}^{-\lambda}$ の単射性と同値となる。

ii) の証明

$\mathcal{H}$ を $(\pi_{\sigma\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の $\{0\}$ でない任意の不変閉部分空間とする。すると $\varphi \in \mathcal{H}$, $(P_B^\lambda \varphi)(e) \neq 0$ となるものが存在する。

$\chi_\tau(k) = \mathrm{Trace}(\tau(k^{-1}))$

$$\int_K \chi_\tau(k)\varphi(k^{-1}k_0)\,dk = \int_K \chi_\tau(k)(\pi_{\sigma\lambda}(k)\varphi)(k_0)\,dk = F(k_0)$$

$\mathcal{H}$ が閉部分空間であり，又不変性から $F \in \mathcal{H}$

次に簡単な計算より

$(P_B^\lambda F)(e) = (P_B^\lambda \varphi)(e)$, $P_B^\lambda F = P_B^\lambda \varphi_{B^*, v}$ $\exists v \in V_\tau$ となる。

従って P_B^λ の単射性より $F = \varphi_{B^* v}$, $v \neq 0$, が得られる。

(注意) S. Helgason [2] によれば (σ, E_σ) が自明な表現であるときには (τ, V_τ) として K の自明な表現を取ればよい。従って命題4は次の様に言いかえられる。

$\pi_{\sigma\lambda} = \pi_\lambda$, $\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{H}$ ((σ, E_σ) が M の自明な表現のとき) とおくと

$(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ 既約. P^λ $P^{-\lambda}$ が共に単射.

§3 P_A^λ の単射性

$C^\infty(K:E_\sigma)=\{F:K\to E_\sigma \mid C^\infty$-関数$\}$ ((σ,E_σ) M の既約表現)

$C^\infty(K\ \sigma)=C^\infty(K:E_\sigma)\cap\mathcal{H}_\sigma$

$\mathbb{D}(K)$ を K 上左不変微分作用素の全体が作る代数

$C^\infty(K:E_\sigma)$ にセミノルム $\nu_D(F)=\sup_{k\in K}\|(DF)(k)\|_{E_\sigma}$ $D\in\mathbb{D}(K)$ によって局所凸位相を入れたものを $\mathcal{D}(K:E_\sigma)$ とすると $C^\infty(K\ \sigma)$ は閉部分空間であり

$$\mathcal{D}(K,E_\sigma)\ni F\longmapsto \bar{F}(k)=\int_M\sigma(m)F(km)\,dm$$

が連続な射影となる。ここで dm は $\int_M dm=1$ なる M のハール測度。$C^\infty(K,\sigma)$ に $\mathcal{D}(K\ E_\sigma)$ からの誘導位相を入れたものを $\mathcal{D}(K,\sigma)$ 各々の双対空間を $\mathcal{D}(K,E_\sigma)'$ $\mathcal{D}(K,\sigma)'$ とする。

$\varphi:K\to E_\sigma$ 局所可積分であり $\varphi(km)=\sigma(m^{-1})\varphi(k)$ $m\in M$, $k\in K$ とする。

$\varphi'\in\mathcal{D}(K,t\sigma)$ $\langle S_\varphi\ \varphi'\rangle=\langle\varphi\ \varphi'\rangle_\sigma=\int_K\langle\varphi(k),\varphi'(k)\rangle_{E_\sigma}dk$ すると

<u>補題5</u> $\mathcal{D}(K\ \sigma)\ni\varphi\mapsto S_\varphi\in\mathcal{D}(K\ t\sigma)'$ は単射.

証明.

$\varphi'\in\mathcal{D}(K\ t\sigma)$ に対し $\varphi_0'\in\mathcal{D}(K:E_\sigma')$ $\overline{\varphi_0'}=\varphi'$ とする。すると $\langle S_\varphi\ \varphi'\rangle=\int_K\langle\varphi(k)\ \varphi_0'(k)\rangle_{E_\sigma}dk$.

故に $S_\varphi=0$ なら すべての $\varphi_0'\in\mathcal{D}(K\ E_\sigma')$ に対して

$\int_K \langle \varphi(k)\ \varphi_0'(k)\rangle dk = 0$ 故に $\varphi = 0$.

以上より $\mathcal{H}_\sigma \subset \mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ と考えられる。そこで P_A^λ の定義を $S \in \mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ にまで拡張する。

$S \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)'$ に対し $\tilde{S} \in \mathcal{D}(K\ E_\sigma')'$ を

$\langle \tilde{S}\ \ \varphi_0\rangle = \langle S\ \ \overline{\varphi_0}\rangle \quad \varphi_0 \in \mathcal{D}(K, E_\sigma')$

によって定める。次に $(e_p)_p$ を E_σ の基底、$(e_p^*)_p$ を E_σ' の双対基底とする。$F \in \mathcal{D}(K)$ ($= C^\infty(K)$ にセミノルム ν_D によって位相を入れたもの。すなわち $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(K : \mathbb{C})$) に対して $F_p(k) = F(k)e_p^*$ とすると $F_p \in \mathcal{D}(K\ E_\sigma')$ そこで $\tilde{S}_p \in \mathcal{D}(K)'$ を $\langle \tilde{S}_p\ \ F\rangle = \langle \tilde{S}, F_p\rangle \quad F \in \mathcal{D}(K)$ とする。

$S \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)' \quad \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C}) \quad A \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\sigma)$

$(P_A^\lambda S)(g) = \sum_p \int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\,\tau(k(g^{-1}k))Ae_p\, d\tilde{S}_p(k)$

すると P_A^λ は基底の取り方によらず、又 $S \in \mathcal{H}_\sigma$ のときは前の定義に一致する。

__補題 6__ P_A^λ が $\mathcal{D}(K\ \sigma)$ 上単射であることと、$\mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ 上単射であることは同値。

証明.

補題5によって $\mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ 上単射であれば、$\mathcal{D}(K.\sigma)$ の上でも単射。逆に $S \in \mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ $P_A^\lambda S = 0$、P_A^λ が $\mathcal{D}(K\ \sigma)$ 上単

解とする。すると任意の $f \in \mathcal{D}(K)$ に対して

$$0 = \int_K f(k)(P_A^\lambda S)(k^{-1}g)\,dk$$
$$= \int_K f(k) \sum_p \int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}kk_0)} \tau(\kappa(g^{-1}kk_0)) A e_p \, d\tilde{S}_p(k)\, dk$$
$$= \int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}k)} \tau(\kappa(g^{-1}k)) A \Big(\sum_p \int_K f(kk_0^{-1})\, d\tilde{S}_p(k_0)\, e_p\Big)\, dk .$$

ここで

$$F(k) = \sum_p \int_K f(kk_0^{-1})\, d\tilde{S}_p(k_0)\, e_p = \sum_p (f * \tilde{S}_p)(k)\, e_p .$$

すると定義より $F \in \mathcal{D}(K,\sigma)$

従って $F \equiv 0$. 故に任意の $f \in \mathcal{D}(K)$ 及び各 p について $f * \tilde{S}_p = 0$ が成立するから $\tilde{S} = 0$, 結局 $S = 0$ となる。

以後, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = 1$ とする。このとき $w \in K$, $\mathrm{Ad}(w)\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ で $\mathrm{Ad}(w)|\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = -1$ となるものを固定する。すると (σ, E_σ) の既約性から次の補題が成立する。

<u>補題7</u> $\dim \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = 1$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ であり

$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C})$ $\mathrm{Re}\langle \sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$ $\forall \alpha \in \Sigma^+$, $v \in E_\sigma$

$S'_{\lambda, v} \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)'$ を, $\varphi \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)$ に対し

$$\langle S'_{\lambda, v}, \varphi \rangle = \int_{\bar{N}} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar{n})} \langle v, \varphi(w\kappa(\bar{n}))\rangle_{E_\sigma}\, d\bar{n}$$

と定義すると任意の $\varphi \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)$ に対し

$\lambda \mapsto \langle S'_{\lambda, v}, \varphi \rangle$ は $\mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C})$ 全体に有理型関数として解析接続出来, さらに有理型関数 $c_\sigma(\lambda)$ が存在して, 次の(i), (ii)が成立つ。

(i) $\lambda \longmapsto \frac{1}{c_{\Gamma}(\lambda)}\langle S'_{\lambda v}, \varphi'\rangle$ はすべての $\varphi' \in \mathcal{D}(K,{}^{+}T)$ に対して整関数となる。

(ii) 各 $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ に対して $\varphi' \in \mathcal{D}(K, {}^{+}T)$ が存在して $\frac{1}{c_{\Gamma}(\lambda)}\langle S'_{\lambda v}, \varphi'\rangle \neq 0$ となる。

証明については S. Helgason [1] 定理4.5, 又は Knapp-Stein [3] 定理3 と同様。

又, 簡単な計算より.

補題8　$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$　$w \in K$, $\mathrm{Ad}(w)\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ とする.

$w\lambda(H) = \lambda(\mathrm{Ad}(w^{-1})H)$　$H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$,　$c_{\Gamma}(\lambda)^{-1}S'_{\lambda v} = S_{\lambda, v}$

すると,

$$P_A^{\lambda} S_{\lambda,v}(g) = e^{-(\sqrt{-1}\,w\lambda+\rho)H(g^{-1})}\, T(k(g^{-1}))\, T(w)\, \mathbb{C}_{\Gamma}(\lambda : \tau) A v$$

ここで

$\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$　$\forall \alpha \in \Sigma^{+}$ のとき

$$\mathbb{C}(\lambda : \tau) = \int_{\bar{N}} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar{n})}\, \tau(k(\bar{n}))\, d\bar{n}$$

は絶対収束し　$\mathbb{C}_{\Gamma}(\lambda : \tau) = c_{\Gamma}(\lambda)^{-1}\mathbb{C}(\lambda, \tau)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ 上整関数となる。

系9　P_A^{λ} が単射であるならば $\mathbb{C}_{\Gamma}(\lambda, \tau)A \neq 0$ さらに $\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$　$\alpha \in \Sigma^{+}$ のときは $\mathbb{C}_{\Gamma}(\lambda, \tau)A \neq 0$ が P_A^{λ} が単射となる為の必要十分条件となる。($\mathcal{H}_{\Gamma}$ の上で)

証明

前半は, 補題6, 補題8 より得られる。

$\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$ とする。

$F \in \mathcal{D}(K)$ $\quad \int_K F(k)\,dk = \int_{\bar N}\int_M F(k(\bar n)m)\, e^{-2\rho H(\bar n)}\, d\bar n\, dm.$

Harish-Chandra [21].

及び $H(a^{-1}k(\bar n)) = H(a^{-1}\bar n a) - H(\bar n) - \log a$. $\quad d(a^{-1}\bar n a) = e^{2\rho \log a}\, d\bar n$

より.

$$(P_A^\lambda \varphi)(a) = e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)\log a}\int_{\bar N} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\, e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(a\bar n a^{-1})}\, \tau(k(\bar n))A\varphi(k(a\bar n a^{-1}))\, d\bar n$$

$\mathrm{Re}\langle \sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0 \quad \alpha \in \Sigma^+$, $\quad a \in A_{\mathfrak p}^+ = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak p}^+$ のとき

$$e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\, e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(a\bar n a^{-1})}\, \tau(k(\bar n))A\varphi(k(a\bar n a^{-1})) = F_\lambda(\bar n, a)$$

は $d\bar n$ に関して可積分.

さらに $a_t = \exp tH$, $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak p}^+$ とするとき,

$\lim_{t\to+\infty} F_\lambda(\bar n, a_t)$ も可積分

ここで $\mathfrak{a}_{\mathfrak p}^+ = \{H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak p} \mid \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Sigma^+\}$.

故に, $\lim_{t\to+\infty} a_t \bar n a_t^{-1} = e$ より

$$e^{(-\sqrt{-1}\lambda+\rho)\log a_t}(P_A^\lambda \varphi)(a_t) \to \left(\int_{\bar N} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\, \tau(k(\bar n))\, d\bar n\right) A\varphi(e)$$

$(t \to +\infty)$

従って $\mathrm{Re}\langle \sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$ のとき. $d_{\Pi_\sigma}(\lambda)^{-1} \neq 0$ に注意すれば.

$C_\sigma(\lambda:\tau)A \neq 0$ ならば P_A^λ は単射となる。

以上により, $C(\lambda:\tau)$ とプランシェレル測度との関係 (Knapp-Stein [37]) を合せれば次の命題が成立すること

が予想される。

<u>命題</u>　G を連結，半単純，非コンパクト・リー群で中心が有限，さらに $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 1$ とする $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ を非ユニタリ主系列表現，対応するプランシェレル測度を $p(\sigma, \lambda)$ とする このとき，$Hom_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ 上の有理型関数 $p_0(\sigma, \lambda)$ が存在して，$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ が可約である為の必要十分条件は λ が $p(\sigma, \lambda)\, p_0(\sigma, \lambda)$ の特異点となること。

References.

[1]. Harish-Chandra. Spherical functions on a semisimple Lie group I, II Amer. J. Math vol. 80 (1958) 241-310, 553-613.

[2] Helgason. S A duality for symmetric space with applications to group representations Advances in Math. vol. 5 (1970) 1-154.

[3] Knapp A.W. and Stein E.M. Intertwining operators for semisimple groups. Ann. of Math. vol. 93 (1971) 489-578.

[4] Warner G. Harmonic analysis on semi simple Lie groups II. Springer-Verlag. (1972)